スピングラス

北大・理　高山　一

§1. スピングラス（SG）模型

Cu－Mn，Au－Fe などの非磁性金属に磁性不純物を 0.5～10at％混入した系 ― 金属SG ― において，帯磁率に鋭いカスプが観測され，ランダムなスピン系での相転移ではないかとの期待のもとに様々な物理量が調べられた。[1] 1975 年 Edwards-Anderson (EA)[2] は，金属SGの特異的な現象は正負競合的な相互作用をもつスピン系での新しいタイプの相転移であるとする論文を発表，これが引金となってSG研究は爆発的な隆盛をみた。しかし数年経た現在でも，SG描像について確定的な答はなく，種々の論争が続いている。このような研究状況を整理するのは難しい仕事であるが，以下，〝正負競合的な相互作用をもつランダムスピン系＝スピングラス〟を前提とし，この系での協力現象について直観的な考察を行いたい。

出発点は通常の Heisenberg 型ハミルトニアンである。相転移を論ずるからには，系の次元性とスピン自由度がまず問題で，実際多くの場合が調べられているが，ここでは簡単のため主に Ising 系を考える：

$$H = -\sum_{ij} J_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j \tag{1}$$

金属SGではスピン配置がランダムであったが，本質は J_{ij} のランダムさであり，スピン配置は規則的であるとしてよい。モデルにより J_{ij} が長距離型か短距離型か，あるいは J_{ij} の分布が離散的（$J_{ij}=\pm J$）か連続的（ガウス分布他）かの違いがあり，[3] それぞれのモデルから導かれる結果のうち，どの部分がSG共通かに注意することが肝要と思われる。

ここで Bethe 格子上に $\pm J$ のボンドをランダムに配置した系を考えてみる。この系ではボンドの正－負に応じて両側のスピンを平行－反平行に無理なく配列できる。全体のスピン配列は一見ランダムだが，相転移の有無に関しては同じ格子上の強磁性体（$J_{ij}=J$）のそれと同等であるのは明らかである。ところが閉じたボンドループを含む格子上で同様なことを考えると，全てのボンドについて無理なくスピンを配列できない。これが frustration である。Frustration のないランダムスピン系[4] の振舞いは適当な処理で pure 系との対応づけができる。逆に，SG相転移の有無に関して frustration 効果は本質的な役割を担っていると言える。[5]

§ 2. 解析的理論と凍結系の配位平均

(1)式から出発して解析的理論を構築しようとすると，凍結したランダム変数 J_{ij} についての平均を避けるわけにいかない。一組の J_{ij} で指定されるあるサンプルの分配関数と自由エネルギーは次式で与えられる。

$$Z\{J\} = \mathrm{T}_{\mathrm{r}}^{\sigma} \exp\{\beta \sum_{ij} J_{ij}\, \sigma_i\, \sigma_j\} \tag{2}$$

$$F\{J\} \cong \overline{F} \equiv -\beta^{-1} < \log Z\{J\} >_{\mathrm{J}} \tag{3}$$

(3)式は，〝熱力学量のような大きな拡がりをもつ物理量のあるサンプルでの観測値は，多くのサンプルについての集団平均値$<>_{\mathrm{J}}$ に等しいと期待される〟を式で表現したものである。常識的には $F\{J\} = \overline{F}$ と考えられているが，相転移のような巨視的相関が問題となる現象を論ずる場合には，具体的な$<>_{\mathrm{J}}$ の処方せんが問題である。これまでの多くの論文では，その処方せんがまちまちで，しかも一つのサンプルで何が起っているのかに関する議論が充分でない。そのため得られた結果が $F\{J\}$ でも成立するのか，$\overline{F}$ ではじめて生じるのか釈然としない。この点での不明確さが今なおSG理論が混沌としている第一の理由であると思える。もちろん，具体的な$<>_{\mathrm{J}}$ の処方せんの裏にはそれぞれのSG描像がある筈で，以下これを検討してみよう。

一つのサンプルでの熱平均$<>_{\mathrm{T}}$ に対して分子場近似を用いる。

$$\begin{aligned} <\sigma_i>_{\mathrm{T}} &= \tanh\{\beta \sum_j J_{ij} <\sigma_j>_{\mathrm{T}}\} \\ &\cong \beta \sum_j J_{ij} <\sigma_j>_{\mathrm{T}} - \frac{\beta^3}{3} \{\sum_j J_{ij} <\sigma_j>_{\mathrm{T}}\}^3 + \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

(4)式に$<>_{\mathrm{J}}$ を実行する際の一つの考え方は， frustrated なボンドが多数あるとしても，系全体にわたる Bethe 格子様のスピン配列が存在し，それがSG凍結の骨格をなすとするもので，ここではこれを Random Ordered Phase (ROP)[6] と呼ぶ。そのような骨格は何種類もあり得るであろう。その意味で系の基底状態は縮退していると予想される。この ROP 描像を記述するのに便利なオーダーパラメータは[7]

$$\xi \equiv < \sigma_i^{(\ell)} < \sigma_i >_{\mathrm{T}} >_{\mathrm{J}} \equiv << \phi_i^{(\ell)} >_{\mathrm{T}} >_{\mathrm{J}} \tag{5}$$

但し $\sigma_i^{(\ell)}$ は ℓ 番目の基底状態における σ_i の向きである。$<>_{\mathrm{J}}$ に対して最も粗い近似

$$\begin{aligned} \xi &= \beta < \sum_j J_{ij}\, \sigma_i^{(\ell)}\, \sigma_j^{(\ell)} < \phi_j^{(\ell)} >_{\mathrm{T}} >_{\mathrm{J}} - \cdots \\ &\cong \beta < \sum_j J_{ij}\, \sigma_i^{(\ell)}\, \sigma_j^{(\ell)} >_{\mathrm{J}}\, \xi - \cdots \end{aligned} \tag{6}$$

を用いると，$T_g = \langle \sum_j J_{ij} \sigma_i^{(\ell)} \sigma_j^{(\ell)} \rangle_J$ で帯磁率のカスプを得る。[8] ROP 描像は反強磁性の自然な拡張になっている。

いま一つの考え方は，frustration 効果が強く，それぞれの J_{ij} が互に他の J_{ij} の効果を block し合い，[9] 結果としてスピンがある方向に凍結するとみるもので，この場合は EA オーダーパラメータ

$$q \equiv \langle\langle \sigma_i \rangle_T^2 \rangle_J \tag{7}$$

を用いるのが便利で，(4)式から

$$\begin{aligned} q &= \beta^2 \langle \{ \sum_{j=1}^{z} J_{ij} \langle \sigma_j \rangle_T \}^2 \rangle_J - \cdots \\ &\cong \beta^2 z \overline{J_{ij}^2}\, q - 2\beta^4 (z \overline{J_{ij}^2}\, q)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{8}$$

が導かれ，$T_g = \sqrt{z \overline{J_{ij}^2}}$ を得る。[10] (8)式を導く際，J_{ij} と両側のスピン配列 $\langle \sigma_i \rangle_T$，$\langle \sigma_j \rangle_T$ に全く相関がないとした。このような考え方をここでは〝block 描像〞と呼ぶことにする。なお(6)，(8)式の $\langle\,\rangle_J$ 操作では，個々のランダムな J_{ij} を均一なボンドに置換している点で，最も粗い有効媒質近似と言える。

分子場近似より高尚な近似に基づくＳＧ理論でも，$\langle\,\rangle_J$ 操作に関する限り問題点は前述の議論と類似しているように思える。国内で盛んな Bethe 近似に基づく混晶系の理論研究でも，$\langle\,\rangle_J$ に関して block 描像[11] と ROP描像[12]との間に論争がある。混晶系では両者の結果は定性的にそれ程違っていない。有効媒質近似の限界か，それとも二つの描像は案外近いのだろうか。高温展開法でも各ベキの $\langle\,\rangle_J$ を含めた評価の仕方が様々で，[9, 13] 結果も収束していない。実空間くりこみ群理論を用いる場合は，くりこみ操作と $\langle\,\rangle_J$ 操作を絡め，分布関数 $P(J_{ij})$ の変換を調べる。この処方せんもかなり微妙なようで，結果もやはり収束していない。[14]

以上のように一連の有効媒質近似では，具体的に $\langle\,\rangle_J$ を実行できるのは有限個のボンドからなる小さなユニットに対してだけである。この近似は相転移の存在が明らかな系の各種物理量の計算には有用であるが，転移の存在そのものの議論では決め手とはならないと思う。最近 frustration 効果が数学的に明確なゲージ場理論を用いて定式化できることが示され，この方向からのアプローチも研究されている。[15] 但しこの場合も $\langle\,\rangle_J$ の処方せんに対する答が出されたわけではない。

EA理論[2] ではレプリカ法を採用することで，$\langle\,\rangle_J$ 操作の面倒を回避する。この方法では，恒等式 $\log x = \lim_{n \to 0} \frac{1}{n} (x^n - 1)$ を用いて(3)式 $\langle \log Z\{J\} \rangle_J$ を $\langle Z^n \{J\} \rangle_J$ の計算に変換し，

ここで $\mathrm{T}_{\mathrm{r}}^{\sigma^{\alpha}}$ の前に$<>_{\mathrm{J}}$ 操作を実行してしまう。例えば J_{ij} がガウス分布の場合

$$<Z^{n}\{J\}>_{\mathrm{J}} = \prod_{\alpha=1}^{n} <\mathrm{Tr}^{\sigma^{\alpha}} \exp\{\beta \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{ij} J_{ij}\, \sigma_i^{\alpha} \sigma_j^{\alpha}\} >_{\mathrm{J}}$$

$$= \mathrm{Tr}^{\sigma^{\alpha}} \exp\{\beta \overline{J_{ij}^2} \sum_{\alpha\beta ij} \sigma_i^{\alpha} \sigma_j^{\alpha} \sigma_i^{\beta} \sigma_j^{\beta}\} \tag{9}$$

となる。即ち，ランダム系の問題がレプリカ $\{\sigma_i^{\alpha}\}$ 間に相互作用を有する均一系の問題に帰着できる。この方法の詳細は田中氏の解説をみていただくとして，ここでは次の点だけ指摘しておく。§1に述べたBethe格子上のランダムスピン系にこのレプリカ法を適用したとすると，直観的には明らかな問題もレプリカ系の問題としては相当面倒になるであろう。この例からも，ROP 的要素が強い系についてはレプリカ法はむしろ遠廻りのように思える。

$<>_{\mathrm{J}}$ 操作のいま一つの方法はランダム行列を用いるもので，SG研究では最初 Kosterlitz ら[3] により調べられた。各非対角成分がガウス分布に従う $N\times N(N\to\infty)$ 行列の固有値分布[16] を用いて，条件 $\sum_i S_i^2 = N$ のもとに $\overline{F}$ を評価し，$T_{\mathrm{g}} = (\overline{J_{ij}^2}/N)^{\frac{1}{2}}$ での相転移を示した。この方法は Thouless ら[9, 17] により Ising 系にも適用されているが，短距離型 J_{ij} についてのランダム行列理論はまだないようである。

§ 3. 計算機によるSG研究

EA理論がでた後，直ちにモンテカルロ（MC）法による計算機実験が行なわれた。帯磁率のカスプ，EAオーダーパラメータの温度依存性などが再現されたが，[18] MC法がSG研究のために有力であるのは，個々のサンプル中のスピン配列の様子を具体的に把握できる点にあると思う。この点で重要な結果の一つは，Ising系の種々のモデルに限らず，[19~21] 現実の金属SGに則したモデル[22]に至るまで，ほとんどのSGモデルに共通して基底状態が縮退していることである。問題は縮退の性質である。無限小ではあっても適切なランダム磁場をかけることである一つの基底状態を選び出せるのであろうか。[6] それとも Landau が論じた1次元強磁性体のように，縮退は $T \cong 0$ でも生きているエントロピーを伴い有限温度では相転移が存在しないのであろうか。[20]

最近 Morgenstern-Binder[21] は個々のサンプルの $Z\{J\}$ を定義どおり厳密に数値計算してしまうプログラムを実行し，ランダム磁場に対応する帯磁率を与えるオーダーパラメータ

$$\phi^2 \equiv < \frac{1}{N_{\mathrm{g}} N^2} \sum_{\ell=1}^{N_{\mathrm{g}}} \sum_{ij} <\phi_i^{(\ell)} \phi_j^{(\ell)}>_{\mathrm{T}} >_{\mathrm{J}} = \frac{T}{N} \chi_{\phi} \tag{10}$$

を調べた。最近接 J_{ij} の Ising 系に限られるが，2次元正方格子について，6×6から 16×

16までの系で得られた結果を∞×∞系へ外挿し，J_{ij} の分布（±Jとガウス）によらず有限温度では相転移は存在しないと結論した。彼らは同じ結論が3次元立方格子でも成立するとしている。

厳密な熱力学的極限ではどうなるかという難しい問題を別にすれば，MC法から得られるSG描像は次のようなものである。低温域での自由エネルギーをスピン位相空間でみると，障壁で隔てられたいくつもの〝谷〟をもつ。限られたMCステップ（MCS）数で系をみれば，ある〝谷〟の中での局所平衡を観測していることになる。MCS数が大きくなれば系が〝谷〟間を移行することもあり，観測値がそれを定義するMCS数に依存する（例えば帯磁率のカスプの位置がずれる[20]）。〝谷〟の中でのスピンの振舞いは，少くとも連続的分布をもつ最近接J_{ij}のIsing系においては，ROP的である。[23]

§4.　むすび

SG研究の現状を整理するつもりが，筆者の想像力が乏しい故の疑問点ばかり強調し過ぎたようだが，SG問題の要点の一つは，frustration効果と密接な関連をもつ基底状態の縮退と相転移様の現象とをいかに関係づけるかであると思う。妥当性が必ずしも明らかでない種々の配位平均法がこれに絡んでくるため，SG研究をさらに複雑にしている。レプリカ法やランダム行列法で得られたT_gは，高温域から低温域のある〝谷〟へ落ち込む転移を与えているのだろうか，それとも，個々のサンプル中でのスピンの様子には固執しない，全く新しい発想が必要とされているのか。SG研究はSG現象そのものの解明ばかりではなく，凍結系の統計力学の発展にも重要な寄与をするものと期待される。

この小論の視野は少し狭ま過ぎたようでもある。SG描像についても§2で述べた二つの他にも多くの提案があり，それに応じて種々のオーダーパラメータが考えられている。この点については鈴木・宮下[24]のレポートを参照されたい。特に，現在国内では都らの非線形帯磁率χ_2の実験[25]を巡って活発な議論が行なわれており，新しいオーダーパラメータの提案もなされている。[24, 26]

ここではまた理論と実験の詳しい比較を行なわなかった。この点に立ち入ろうとすると§1で示した前提〝正負競合的な相互作用をする系＝SG〟自体をまず検討の対称にしなければならない。これについては都の解説[1, 25]がある。そこでも指摘されているように，また系の〝谷〟間の移行の問題にも関連して，今後の課題の一つはSGの動的振舞いの解明であり，SG描像の決め手を与えるのではないかと思う。

文　献

1) 実験研究のレヴューとして　都福仁，日本物理学会誌 32（1977）463

J.A. Mydosh, J. Mag. Mag. Mater. **7** (1978) 237.

J. Souletie, J. de. Phys. **39** (1978) C2-3.

2) S.F. Edwards and P.W. Anderson, J. Phys. **F5** (1975) 965.

3) 違いをスピン自由度－レンジ－分布の順に表わすと，H.－任意－ガウス：EAモデル，I.－∞－ガウス：D. Sherrington and S. Kirkpatrick, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 1792, Sherical－∞－ガウス J.M. Kosterlitz, D.J. Thouless and R.C. Jones, Phys. Rev. Lett. **36** (1976) 1217, I.－最近接－±J：混晶系のモデル.

4) 例えばD.C. Mattis, Phys. Lett. **A56** (1976) 421.

5) G. Toulouse, Commun. Phys. **2** (1977) 115.

6) Y. Ueno and T. Oguchi, J. Phys. Soc. Jpn. **40** (1976) 1513.

7) K. Binder, Z. Phys. **B26** (1977) 339.

8) H. Takayama, J. Phys. Soc. Jpn. **45** (1978) 382.

9) D.J. Thouless, P.W. Anderson and R.G. Palmer, Phil. Mag. **35** (1977) 593.

10) D. Sherrington, J. Phys. **C8** (1975) L208.

11) F. Matsubara and M. Sakata, Prog. Theor. Phys. **55** (1976) 672 は混晶系の研究でEA理論とは独立に，この描像を提案しGlass-Like Phase と呼んだ。

S. Katsura, Prog. Theor. Phys. **58** (1977) 434.

12) 小口武彦，上野陽太郎，固体物理 12（1977）641.

13) R. Fisch and A.B. Harris, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 785.

D.C. Rapaport, J. Phys. **C10** (1977) L543.

14) P.W. Anderson and C.M. Pond, Phys. Rev. Lett. **40** (1978) 903.

W. Kinzel and K.H. Fischer, J. Phys. **C11** (1978) 2115.

15) I.E. Dzyaloshinskii and G.E. Volovik, J. de. Phys. **39** (1978) 693.

T. Izuyama, preprint.

16) M.L. Metha, *Random Matrices and Statistical Theory of Energy Levels* (Academic, New York, 1967).

17) K. Nakanishi, preprint.

18) MC法による初期のSG研究については

K. Binder and D. Stauffer, *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*, edited by K. Binder (Springer-Verlag, Berlin, 1979).

19) S. Kirkpatrick, Phys. Rev. **B16** (1977) 4630.

C. Dasgupta, S.-K. Ma and C.-K. Hu, Phys. Rev. **B20** (1979) 3837.

R.G. Palmer and C.M. Pond, J. Phys. **F9** (1979) 1451.

20) A.J. Bray, M.A. Moore, and P. Reed, J. Phys. **C11** (1978) 1187.

21) I. Morgenstern and K. Binder, Phys. Rev. **B22** (1980) 288,およびpreprint.

22) L.R. Walker and R.E. Walstedt, Phys. Rev. B. 印刷中.

23) S. Takase and H. Takayama, preprint.

24) M. Suzuki and S. Miyashita, preprint（第14回統計力学国際会議での総合報告）.

25) Y. Miyako, S. Chikazawa, T. Satō and T. Saito, J. Mag. Mag. Mater. **15-18** (1980) 139, および都福仁, 〝ランダム系の物理学〃講習会テキスト（日本物理学会, 1980）中の報告.

26) 観測される χ_2 の T_g 近傍の異常は block 描像からは容易に導けるが, ROP描像からは難しい.

S. Katsura, Prog. Theor. Phys. **55** (1976) 1049.

M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **58** (1977) 1151.

K. Wada and H. Takayama, Prog. Theor. Phys. **64** (1980) 327.

S. Fujiki and S. Katsura, preprint.

自由エネルギー極小の理論でかつ χ_2 の実験を説明する, 新しいオーダーパラメータを含む理論として, 文献24) と

K. Honda and H. Nakano, Prog. Theor. Phys. **63** (1980) 1800, 及び同誌印刷中.